

3  
8

Под редакцией  
И. В. Яценко

А. В. Хачатурян

ЕГЭ  
2019

МАТЕМАТИКА

8  
Базовый

3  
Профильный

НАГЛЯДНАЯ  
ГЕОМЕТРИЯ

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

ФГОС

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ 2019

А. В. Хачатурян

ЕГЭ 2019. Математика  
Наглядная геометрия

Задача 3 (профильный уровень)

Задача 8 (базовый уровень)

Рабочая тетрадь

Под редакцией И. В. Ященко

Издание соответствует Федеральному государственному  
образовательному стандарту (ФГОС)

Москва  
Издательство МЦНМО  
2019

УДК 373:51  
ББК 22.1я72  
Х29

Х29 **Хачатурян А. В.**  
ЕГЭ 2019. Математика. Наглядная геометрия. Задача 3 (профильный уровень). Задача 8 (базовый уровень). Рабочая тетрадь / Под ред. И. В. Яценко. — М.: МЦНМО, 2019. — 72 с.

ISBN 978-5-4439-1313-1

Рабочая тетрадь по математике серии «ЕГЭ 2019. Математика» ориентирована на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче Единого государственного экзамена по математике в 2019 году по базовому и профильному уровням. В рабочей тетради представлены задачи по одной позиции контрольных измерительных материалов ЕГЭ-2019.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль уровня основных арифметических навыков и умения решать геометрические задачи. Рабочая тетрадь ориентирована на один учебный год, однако при необходимости позволит в кратчайшие сроки восполнить пробелы в знаниях выпускника.

Тетрадь предназначена для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

*Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включён в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.*

12+

ISBN 978-5-4439-1313-1

© Хачатурян А. В., 2019.  
© МЦНМО, 2019.

## От редактора серии

Прежде чем вы начнёте работать с тетрадами, дадим некоторые пояснения и советы.

Планируется, что в 2019 году у вас будет возможность выбрать уровень экзамена по математике — базовый или профильный. Вариант базового уровня будет состоять из 20 задач, проверяющих освоение Федерального государственного образовательного стандарта на базовом уровне.

Вариант ЕГЭ профильного уровня состоит из двух частей. Первая часть содержит 8 заданий базового уровня сложности по основным темам школьной программы, включая практико-ориентированные задания с кратким ответом. Вторая часть состоит из 11 более сложных заданий по курсу математики средней школы; из них четыре с кратким ответом (задания 9—12) и семь с развёрнутым ответом (задания 13—19).

Рабочие тетради организованы в соответствии со структурой экзамена и позволяют вам подготовиться к выполнению всех заданий с кратким ответом, выявить и устранить пробелы в своих знаниях.

Профильный уровень предназначен в первую очередь для тех, кому математика требуется при поступлении в вуз. Если вы ориентируетесь на этот уровень, то понимаете, что нужно уметь решать все задания с кратким ответом — ведь на решение такой задачи и вписывание ответа в лист на экзамене уйдёт меньше времени, чем на задание с развёрнутым решением; обидно терять баллы из-за ошибок в относительно простых задачах.

Кроме того, тренировка на простых задачах позволит вам избежать технических ошибок и при решении задач с полным решением.

Работу с тетрадью следует начать с выполнения диагностической работы. Затем рекомендуется прочитать решения задач и сравнить свои решения с решениями, приведёнными в книге. Если какая-то задача или тема вызывает затруднения, следует после повторения материала выполнить тематические тренинги.

Для завершающего контроля готовности к выполнению заданий соответствующей позиции ЕГЭ служат диагностические работы, размещённые в конце тетради.

Работа с серией рабочих тетрадей для подготовки к ЕГЭ по математике позволит выявить и в кратчайшие сроки ликвидировать пробелы в знаниях, но не может заменить систематического изучения математики.

*Желаем успеха!*

## Введение

В данной брошюре рассматриваются простейшие задачи на нахождение длин, углов и площадей, так или иначе привязанные к прямоугольной координатной сетке. Подобная разметка плоскости хорошо знакома и привычна любому ученику по клетчатой бумаге, которая постоянно используется на уроках математики с начальной школы.

Большинство задач, которые здесь разбираются, совсем несложные и решаются без труда, часто «в уме», без письменных вычислений. Работа над данным сборником поможет не только подготовиться к одной из задач Единого государственного экзамена, но и повторить основные определения, некоторые базовые формулы и, что нам кажется главным, отточить определённое «геометрическое зрение», на выработку которого эти задачи в основном и нацелены.

Почти все задачи на данную тему, предлагаемые на Едином государственном экзамене, снабжены картинкой, на которой та или иная фигура изображена на квадратной сетке или на координатной плоскости. В случае координатной плоскости у важных для решения задачи точек явно указываются координаты, которые и необходимо использовать для вычислений. Несколько более тонкая ситуация с задачами, в которых фигура нарисована на клетчатой сетке. Составители заданий в этом случае придерживаются следующих договорённостей. Если точка на чертеже явно отмечена (подписана или выделена) и при этом она кажется расположенной в одном из узлов сетки (узел — точка пересечения вертикальной и горизонтальной линии), то считается, что она находится *именно в этом узле*. Обычно этого достаточно для решения задачи. Однако в небольшом количестве заданий может встретиться ситуация, когда решающий должен увидеть, что линия *точно проходит* через некоторый узел, потому что без этого задачу не решить. Конечно, это некоторая проблема, поскольку глазомер человека не абсолютен и, вообще говоря, мы не можем с уверенностью сказать, проходит ли линия точно через узел или в полумиллиметре от него. Однако мы надеемся, что в таких случаях здравый смысл придёт читателю на помощь, а мы со своей стороны разберём подробно несколько таких примеров.

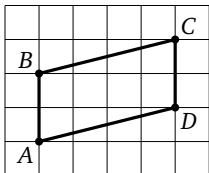
Сборник открывает диагностическая работа, и мы рекомендуем учащимся начать с неё для определения тех типов задач, решение которых вызывает сложности. Задачи этой диагностической работы разбиты на тематические четвёрки, при этом внутри каждой такой четвёрки уровень сложности задач немного возрастает.

За диагностической работой следуют пять небольших разделов, в которых подробно разбираются решения каждой четвёрки задач, даётся нужный теоретический и методический материал. Каждый раздел завершается двумя тренировочными работами, первая из которых базового уровня сложности, а вторая — повышенного.

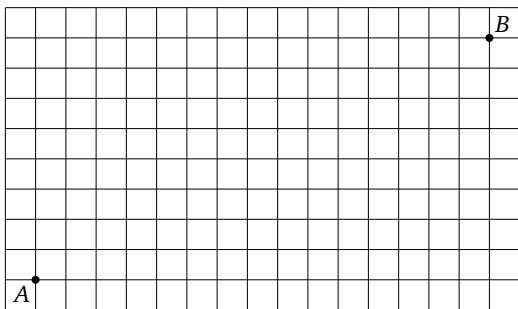
Завершают сборник четыре диагностические работы для итогового повторения. Ко всем задачам тренировочных и диагностических работ приведены ответы.

## Диагностическая работа 1

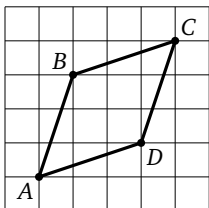
**1.1.** На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см изображён параллелограмм  $ABCD$ . Найдите длину его высоты, проведённой к стороне  $AB$ . Ответ выразите в сантиметрах.



**1.2.** На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  отмечены точки  $A$  и  $B$ . Найдите длину отрезка  $AB$ .



**1.3.** На клетчатой бумаге с размером клетки  $\sqrt{10} \times \sqrt{10}$  изображён ромб  $ABCD$ . Найдите его периметр.



Ответы:

**1.1**

--	--	--	--

**1.2**

--	--	--	--

**1.3**

--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

1.4

--	--	--	--	--	--	--	--

2.1

--	--	--	--	--	--	--	--

2.2

--	--	--	--	--	--	--	--

2.3

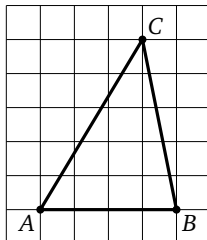
--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

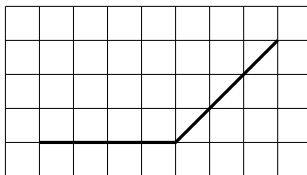
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

# Диагностическая работа 1

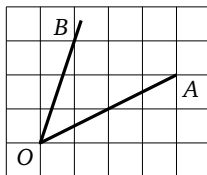
1.4. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображён треугольник  $ABC$ . Найдите длину средней линии этого треугольника, параллельной стороне  $AB$ .



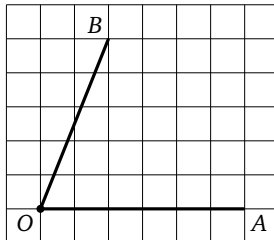
2.1. На клетчатой бумаге изображён угол. Найдите его величину. Ответ выразите в градусах.



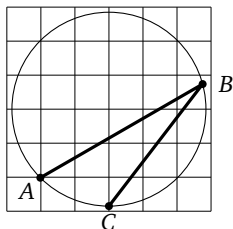
2.2. На клетчатой бумаге изображён угол  $BOA$ . Найдите его величину. Ответ выразите в градусах.



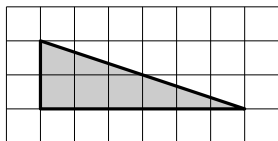
2.3. На клетчатой бумаге изображён угол  $BOA$ . Найдите тангенс этого угла.



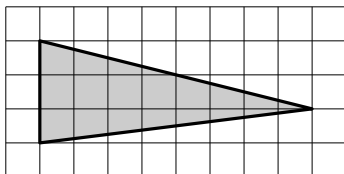
2.4. На клетчатой бумаге изображён угол  $ABC$ . Найдите его величину. Ответ выразите в градусах.



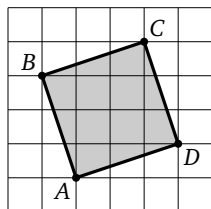
3.1. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) изображён треугольник. Найдите его площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



3.2. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) изображён треугольник. Найдите его площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



3.3. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображён четырёхугольник. Найдите его площадь.



Ответы:

2.4

--	--	--	--	--	--	--	--

3.1

--	--	--	--	--	--	--	--

3.2

--	--	--	--	--	--	--	--

3.3

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



Ответы:

3.4

--	--	--	--	--	--	--	--

4.1

--	--	--	--	--	--	--	--

4.2

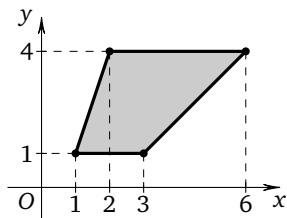
--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

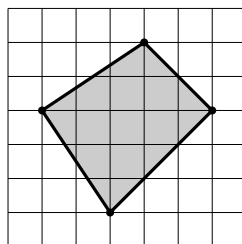
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Диагностическая работа 1

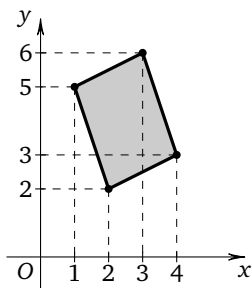
3.4. На координатной плоскости изображена трапеция. Найдите её площадь.



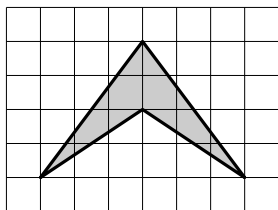
4.1. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) изображён четырёхугольник. Найдите его площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



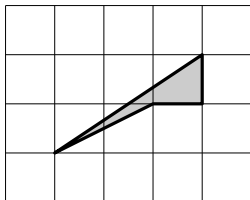
4.2. На координатной плоскости изображён параллелограмм. Найдите его площадь.



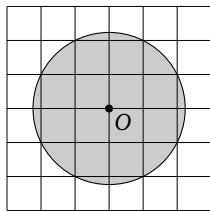
4.3. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображён четырёхугольник. Найдите его площадь.



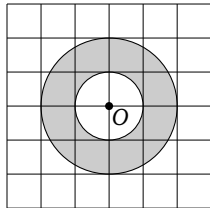
4.4. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) изображён четырёхугольник. Найдите его площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



5.1. На клетчатой бумаге (сторона клетки равна 1) изображён круг. Найдите его площадь  $S$ . В качестве ответа запишите число  $\frac{S}{\pi}$ .



5.2. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 51. Найдите площадь закрашенной части.



Ответы:

4.3

--	--	--	--	--	--	--	--

4.4

--	--	--	--	--	--	--	--

5.1

--	--	--	--	--	--	--	--

5.2

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

5.3

--	--	--	--	--	--	--	--

5.4

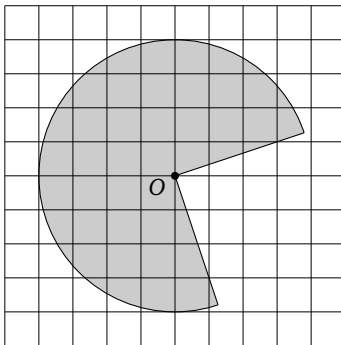
--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

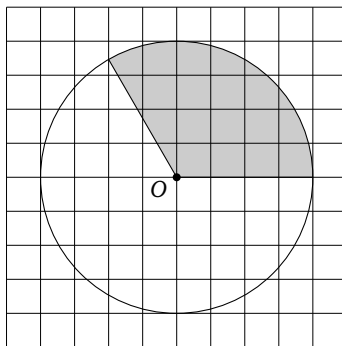
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

# Диагностическая работа 1

5.3. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) изображён круг. Найдите площадь  $S$  его закрашенной части, выразив её в квадратных сантиметрах. В качестве ответа запишите число  $\frac{S}{\pi}$ .



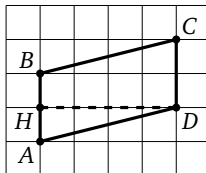
5.4. На клетчатой бумаге изображён круг. Площадь закрашенного сектора равна 32. Найдите площадь круга.



## Расстояния на плоскости. Решения задач 1.1—1.4 диагностической работы 1

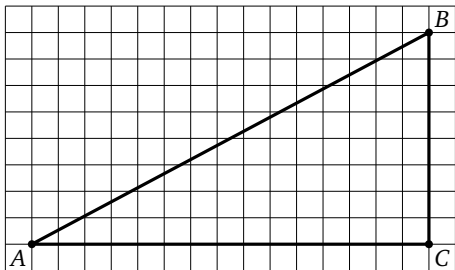
Клетки или координатная сетка задают на плоскости два взаимно перпендикулярных направления, а размер клеток — масштаб на каждом из них. На размеченной подобным образом плоскости нетрудно найти расстояние между точками.

Проще всего найти длину отрезка, параллельного направлениям сетки. Решим задачу 1.1. Так как сторона  $AB$  параллелограмма вертикальна, высота, проведённая к ней, будет горизонтальна. Нагляднее всего провести её из точки  $D$  (см. рисунок). Отрезок  $DH$  занимает 4 клетки, так что  $DH = 4$  см. Единицы длины в ответе указывать не надо, так что **ответ: 4**.



В случае, если отрезок не параллелен линиям сетки, для нахождения его длины необходима теорема Пифагора. Решим задачу 1.2. Будем понимать отрезок  $AB$  как гипотенузу треугольника  $ABC$ , катеты которого идут по линиям сетки. Видим, что  $AC = 15$ ,  $BC = 8$ , так что

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17.$$

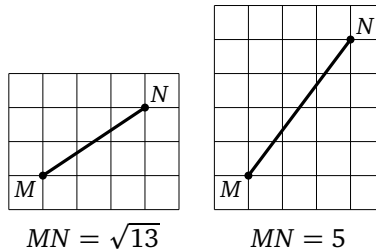
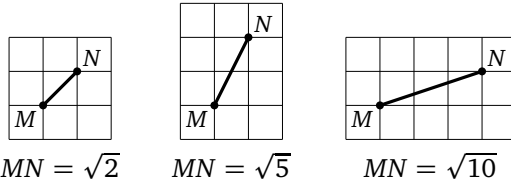


**Ответ: 17.**

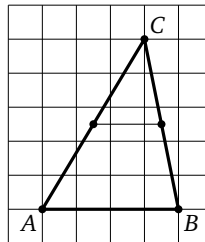
Заметим, что корень в этой задаче оказался целым числом, иначе записать ответ по правилам экзамена было бы невозможно. Это, конечно, специально подобранная ситуация: стороны треугольника  $ABC$  — числа 8, 15, 17 — составляют так называемую «пифагорову тройку». Таких троек бесконечно много, хотя встречаются они не часто. Другие популярные примеры — 3, 4, 5 или 5, 12, 13.

Теорема Пифагора лежит и в основе формулы для нахождения расстояния между точками, координаты которых заданы. А именно, если точка  $A$  имеет координаты  $A(x_a; y_a)$ , а точка  $B$  — координаты  $B(x_b; y_b)$ , то  $AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$ .

По теореме Пифагора можно вычислить расстояния между любыми двумя узлами сетки. Некоторые небольшие расстояния часто встречаются в задачах, их несложно (и полезно) запомнить (см. рисунки, на которых мы считаем, что сторона клетки равна 1).



Вот в задаче 1.3, как видно из одного из рисунков выше, каждая сторона ромба равна  $\sqrt{10}$ , а его периметр  $4\sqrt{10}$ . Для того чтобы ответ был рациональным числом, составители задания взяли сторону клетки равной  $\sqrt{10}$ . Это в  $\sqrt{10}$  раз больше стандартного значения 1, поэтому и любая длина на такой сетке увеличивается в  $\sqrt{10}$  раз. **Ответ:**  $4\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 40$ .



Решим теперь задачу 1.4. В ней, как и в задаче 1.1, на чертеже нет нужного отрезка, но даже нарисовав его (см. рисунок), мы не приближаемся к решению — его концы не попадают в узлы сетки. В этом случае нужно воспользоваться *теоремой о средней линии треугольника*: средняя линия треугольника параллельна его основанию и равна его половине. Итак, **ответом** служит  $\frac{AB}{2} = 2$ .

Перечислим ещё несколько простых фактов, позволяющих вычислять длины отрезков.

У равнобедренного треугольника медиана, биссектриса и высота, проведённые к основанию, совпадают.

В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна её половине. Она же является радиусом описанной окружности этого треугольника.

Средняя линия трапеции параллельна её основаниям и равна их полусумме.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершин треугольника.

Ответы:

1

--	--	--	--	--	--	--	--

2

--	--	--	--	--	--	--	--

3

--	--	--	--	--	--	--	--

4

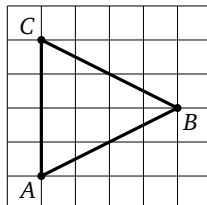
--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

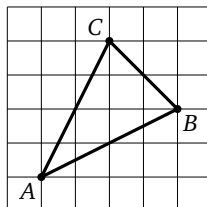
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

## Тренировочная работа 1А

1. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображён треугольник  $ABC$ . Найдите длину биссектрисы, проведённой из вершины  $B$ .

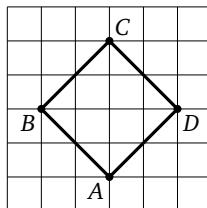


2. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 изображён треугольник  $ABC$ . Найдите длину его медианы, проведённой к стороне  $AB$ .



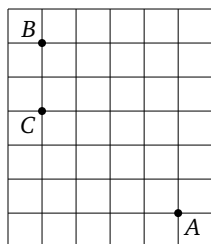
3. Найдите расстояние между точками  $A(-2; 1)$  и  $B(1; -3)$ .

4. На клетчатой бумаге с размером клетки  $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$  изображён квадрат  $ABCD$ . Найдите радиус вписанной в него окружности.

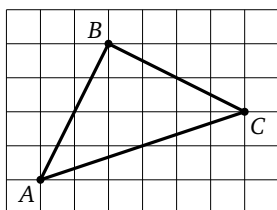


Тренировочная работа 1А

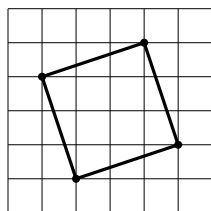
5. На клетчатой бумаге с размером клетки  $3 \times 3$  отмечены точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $BC$ .



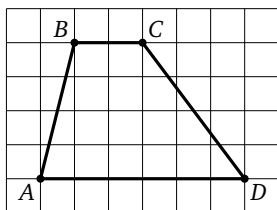
6. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображён треугольник  $ABC$ . Найдите длину его медианы, проведённой к стороне  $BC$ .



7. На клетчатой бумаге (сторона клетки  $\sqrt{5}$ ) изображён квадрат. Найдите длину его диагонали.



8. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображена трапеция  $ABCD$ . Найдите длину её высоты.



Ответы:

5

6

7

8

Образец написания:



Ответы:

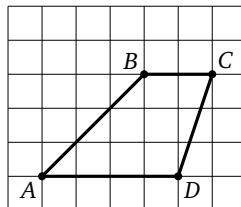
9

--	--	--	--	--	--	--	--

10

--	--	--	--	--	--	--	--

9. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображена трапеция  $ABCD$ . Найдите длину её средней линии.



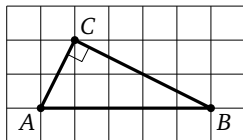
10. Найдите периметр четырёхугольника  $ABCD$  с вершинами  $A(-7; -2)$ ,  $B(-7; 2)$ ,  $C(5; -3)$ ,  $D(5; -7)$ .

Образец написания:

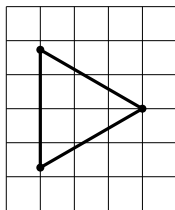
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

## Тренировочная работа 1Б

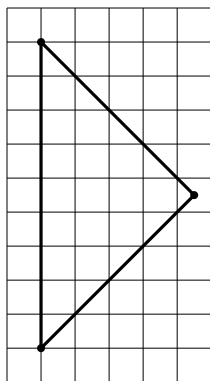
1. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) изображён прямоугольный треугольник  $ABC$ . Найдите радиус описанной вокруг этого треугольника окружности. Ответ дайте в сантиметрах.



2. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображён равносторонний треугольник  $ABC$ . Найдите радиус вписанной в него окружности.



3. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) изображён прямоугольный треугольник  $ABC$ . Найдите длину медианы этого треугольника, проведённой из вершины прямого угла. Ответ дайте в сантиметрах.



Ответы:

1

--	--	--	--	--	--	--	--

2

--	--	--	--	--	--	--	--

3

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

4

--	--	--	--	--	--	--	--

5

--	--	--	--	--	--	--	--

6

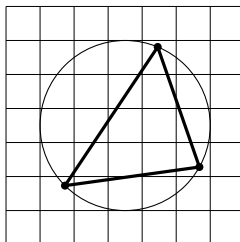
--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

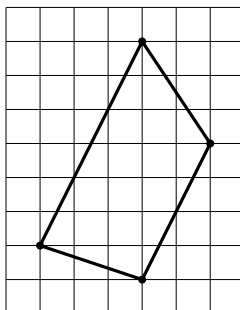
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

# Тренировочная работа 1Б

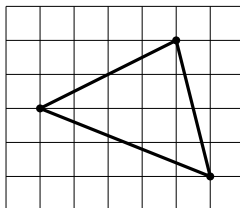
4. На клетчатой бумаге с размером клетки  $3 \times 3$  изображён треугольник. Найдите радиус описанной вокруг него окружности.



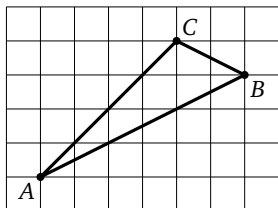
5. На клетчатой бумаге с размером клетки  $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$  изображена трапеция. Найдите длину её средней линии.



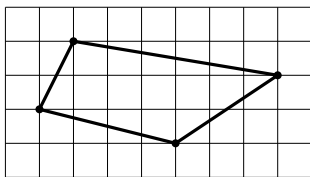
6. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображён треугольник. Найдите расстояние от точки пересечения его медиан до середины его самой короткой стороны.



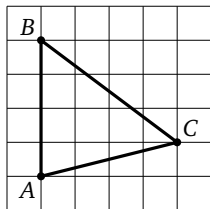
7. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображён треугольник  $ABC$ . Найдите длину его биссектрисы, проведённой к стороне  $AC$ .



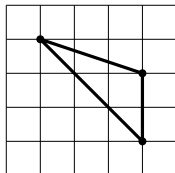
8. На клетчатой бумаге изображён четырёхугольник. Найдите отношение длин его короткой и длинной диагоналей.



9. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображён треугольник  $ABC$ . Найдите длину его высоты, проведённой к стороне  $BC$ .



10. На клетчатой бумаге с размером клетки  $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$  изображён треугольник. Найдите радиус его описанной окружности.



Ответы:

7

8

9

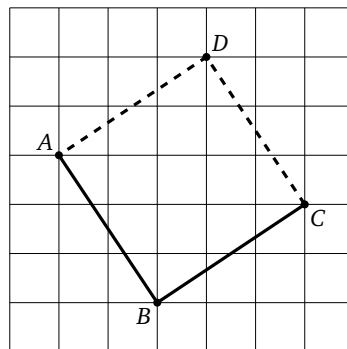
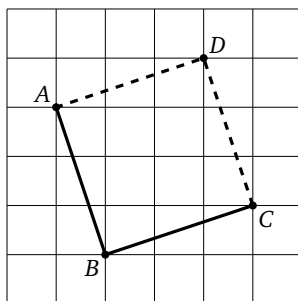
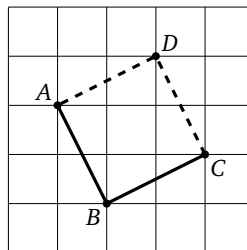
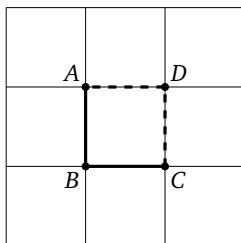
10

Образец написания:

## Измерение углов. Решения задач 2.1—2.4 диагностической работы 1

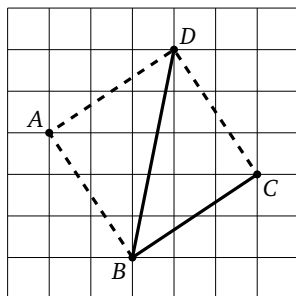
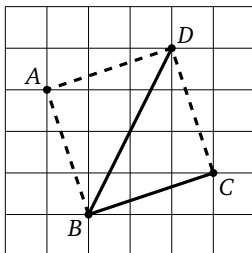
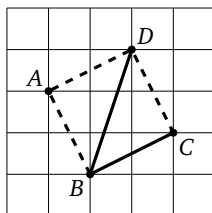
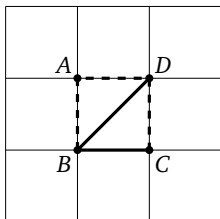
Клетчатая сетка задаёт на плоскости два взаимно перпендикулярных направления, и поэтому на размеченной плоскости так естественно возникает прямой угол. Прямой угол образуют не только горизонтальные и вертикальные прямые — можно нарисовать сколько угодно по-разному повёрнутых пар перпендикулярных прямых, проходящих через узлы сетки.

Все углы  $ABC$  на рисунках, приведённых ниже, прямые. Проще всего убедиться в этом, мысленно дорисовав фигуру до квадрата  $ABCD$  (мы сделали это пунктирными линиями). То, что получаются квадраты, наглядно очевидно, а строго можно доказать, установив, например, равенство всех сторон и равенство диагоналей.



Диагональ квадрата образует со стороной угол  $45^\circ$ , так что бесконечное разнообразие прямых углов на сетке порождает такое же разнообразие расположений углов в  $45^\circ$ . На рисун-

как ниже все углы  $DBC$  равны  $45^\circ$ .



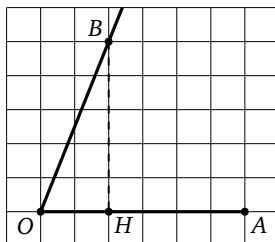
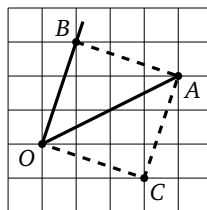
Решим задачу 2.1. Угол, смежный с данным, очевидно, равен  $45^\circ$ , так что величина изображённого угла  $135^\circ$ . **Ответ:** 135.

Нетрудно решить и задачу 2.2. «Дорисовывая» мысленно треугольник  $OBA$  до квадрата  $OABC$ , видим, что  $\angle AOB = 45^\circ$ . **Ответ:** 45.

Если изобразить какой-то произвольный угол с вершинами в узлах сетки, его величину, скорее всего, будет затруднительно выразить в градусах, зато его тангенс всегда будет рациональным числом, и его, как правило, нетрудно вычислить.

Так, в задаче 2.3 можно опустить перпендикуляр  $BH$  на сторону  $OA$  и тогда  $\operatorname{tg} \angle BOA = \frac{BH}{OH} = \frac{5}{2} = 2,5$ . **Ответ:** 2,5.

Обратите внимание на то, что во всех задачах этого раздела не указывается размер клетки, — для нахождения угловых величин масштаб неважен, и для необходимых подсчётов можно выбирать любой.

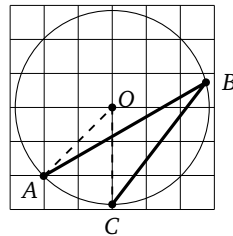


Кстати, часто встречающиеся в элементарной геометрии углы  $30^\circ$  и  $60^\circ$  невозможно изобразить на клетчатой сетке с вершинами в её узлах, потому что, как известно,  $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$  и  $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$  — иррациональные числа.

Имеется и «бездумный» способ нахождения угла с вершинами в узлах сетки — он основан на *теореме косинусов*. Желая найти угол  $ABC$ , мы находим  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ , а затем применяем формулу  $\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC}$ . Зная косинус угла, можно найти его тангенс или синус, а иногда и сам угол. Несмотря на свою универсальность, метод этот громоздкий, и чаще всего без него можно обойтись.

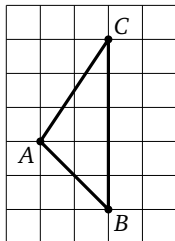
Ещё один способ вычисления углов основан на *теореме о вписанном угле*: все углы, вписанные в окружность и опирающиеся на некоторую её дугу, равны между собой и составляют половину центрального угла окружности, задающего эту дугу. Отсюда, в частности, следует, что вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, прямой, а биссектриса вписанного угла делит пополам дугу, на которую он опирается.

Решим теперь задачу 2.4. Видно, что центр окружности расположен в узле сетки — в точке  $O$ . Тогда  $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ$ . **Ответ:** 22,5.

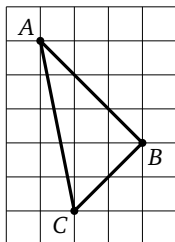


## Тренировочная работа 2А

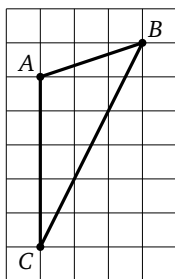
1. На клетчатой бумаге изображён треугольник. Найдите величину угла  $ABC$ . Ответ выразите в градусах.



2. На клетчатой бумаге изображён треугольник  $ABC$ . Найдите величину его наибольшего угла. Ответ выразите в градусах.



3. На клетчатой бумаге изображён треугольник  $ABC$ . Найдите сумму  $\angle A + \angle C$ . Ответ выразите в градусах.



Ответы:

1

--	--	--	--	--	--	--	--

2

--	--	--	--	--	--	--	--

3

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



Ответы:

4

--	--	--	--	--	--	--	--

5

--	--	--	--	--	--	--	--

6

--	--	--	--	--	--	--	--

7

--	--	--	--	--	--	--	--

8

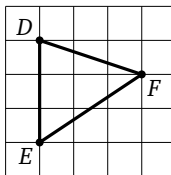
--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

## Тренировочная работа 2А

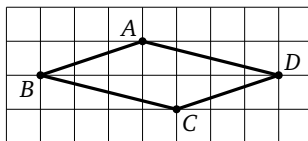
4. На клетчатой бумаге изображён треугольник  $DEF$ . Найдите тангенс угла  $E$  этого треугольника.



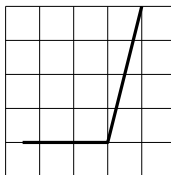
5. На клетчатой бумаге изображён угол. Найдите тангенс этого угла.



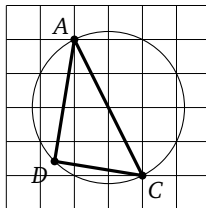
6. На клетчатой бумаге изображён четырёхугольник  $ABCD$ . Найдите  $\angle BAD + \angle ADC$ . Ответ выразите в градусах.



7. На клетчатой бумаге изображён угол. Найдите тангенс этого угла.

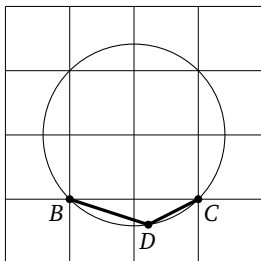


8. На клетчатой бумаге изображён треугольник  $ADC$ , вписанный в окружность. Найдите  $\angle ADC$ . Ответ выразите в градусах.

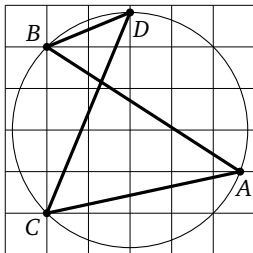


Тренировочная работа 2А

9. На клетчатой бумаге изображён угол  $BDC$ . Найдите его величину. Ответ выразите в градусах.



10. На клетчатой бумаге изображена фигура. Найдите  $\angle ABD - \angle ACD$ . Ответ выразите в градусах.



Ответы:

9

--	--	--	--	--	--	--	--

10

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

1

--	--	--	--	--	--	--	--

2

--	--	--	--	--	--	--	--

3

--	--	--	--	--	--	--	--

4

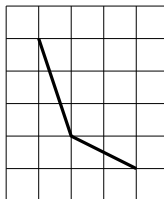
--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

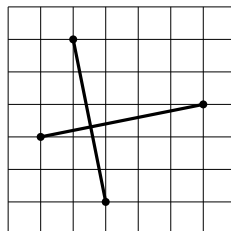
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

## Тренировочная работа 2Б

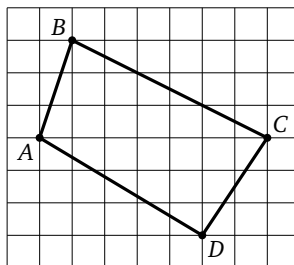
1. На клетчатой бумаге изображён угол. Найдите его величину. Ответ выразите в градусах.



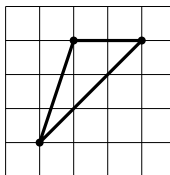
2. На клетчатой бумаге изображены два отрезка. Определите, под каким углом они пересекаются. Ответ выразите в градусах.



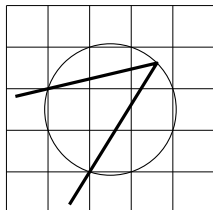
3. На клетчатой бумаге изображён четырёхугольник  $ABCD$ . Найдите тангенс острого угла, под которым пересекаются его диагонали.



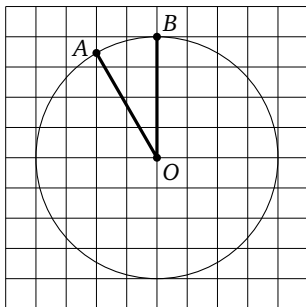
4. На клетчатой бумаге изображён треугольник. Найдите сумму тангенсов всех его углов.



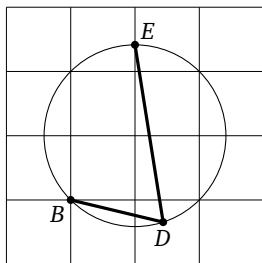
5. На клетчатой бумаге изображён угол. Найдите его величину. Ответ выразите в градусах.



6. На клетчатой бумаге изображён угол  $AOB$ . Найдите его величину. Ответ выразите в градусах.



7. На клетчатой бумаге изображён угол  $BDE$ . Найдите его величину. Ответ выразите в градусах.



Ответы:

5

--	--	--	--	--	--	--	--

6

--	--	--	--	--	--	--	--

7

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

8

--	--	--	--	--	--	--	--

9

--	--	--	--	--	--	--	--

10

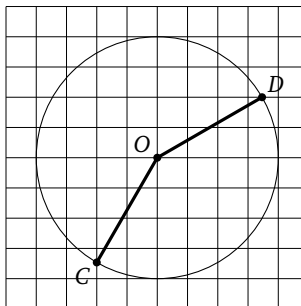
--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

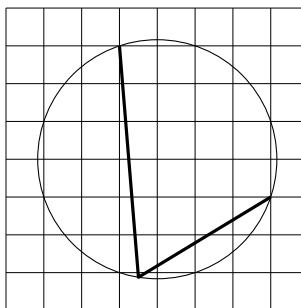
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

## Тренировочная работа 2Б

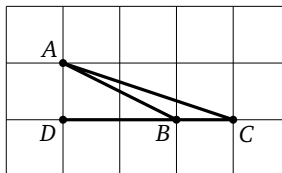
8. На клетчатой бумаге изображён угол  $COD$ . Найдите его величину. Ответ выразите в градусах.



9. На клетчатой бумаге изображён угол, вписанный в окружность. Найдите его тангенс.



10. На клетчатой бумаге отмечены точки  $A, B, C$  и  $D$ . Найдите  $\angle ABD + \angle ACD$ . Ответ выразите в градусах.



## Вычисление площадей по формулам. Решения задач 3.1—3.4 диагностической работы 1

Переходим к задачам на вычисление площадей. Общие методы будут обсуждаться в следующей главе, а сейчас рассмотрим примеры применения формул площади треугольников и четырёхугольников. Напомним некоторые из них.

*Площадь треугольника* равна половине произведения высоты треугольника на сторону, к которой эта высота проведена:  $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$ . В частности, площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов. Другие формулы, изучаемые в школе, обычно неудобны в таких задачах — содержат трудно определяемые «глазом» параметры или слишком громоздки.

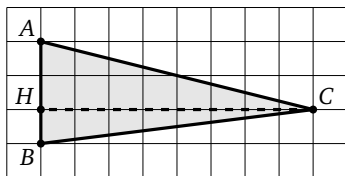
*Площадь параллелограмма* равна произведению высоты на сторону, на которую она опущена:  $S = a \cdot h_a$ . В частности, площадь прямоугольника равна произведению его сторон.

*Площадь трапеции* равна произведению высоты на среднюю линию, которая в свою очередь равна полусумме оснований:  $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$ .

Общая формула площади четырёхугольника (половина произведения диагоналей на синус угла между ними) в подобных «наглядных» задачах удобна, пожалуй, разве что в случае, когда диагонали перпендикулярны и синус равен единице. Тогда получается  $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ , где  $d_1$  и  $d_2$  — диагонали. Например, так можно вычислить площадь ромба.

Решим задачу 3.1. Треугольник, изображённый на картинке, прямоугольный, его катеты 2 см и 6 см, так что  $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$  см<sup>2</sup>. **Ответ**, как обычно, требуется дать только числовой: 6.

А вот в задаче 3.2 треугольник явно не прямоугольный. Чтобы сосчитать его площадь, проведём высоту  $CH$ . Имеем  $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 = 12$  см<sup>2</sup>, то есть **ответ**: 12.



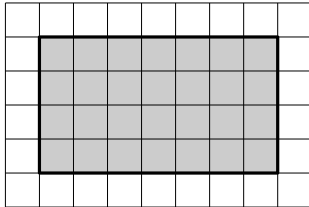
Заметим, что площадь фигуры равна количеству единичных клеток, которые она покрывает. На этом основан способ приближённого подсчёта площади с помощью прозрачной квадратной сетки («палетки»). Обычно трудно точно понять, сколько клеток содержит фигура, но такая оценка площади страхует от грубых ошибок. Так, например, если бы мы перепутали формулу площади треугольника и параллелограмма и забыли в решении предыдущей задачи разделить на 2, мы получили бы ответ 24. Это явный абсурд — хорошо видно, что столько клеток в треугольник не поместится.

В задаче 3.3 нужно найти, конечно, площадь квадрата. Это совсем несложно сделать, вычислив предварительно по теореме Пифагора его сторону:  $AB = \sqrt{10}$ , так что площадь равна  $\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 10$ . **Ответ:** 10.

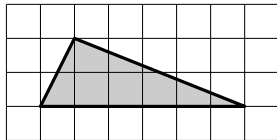
Наконец, решим задачу 3.4, где нужно найти площадь трапеции, заданной не на сетке, а на координатной плоскости. Нижнее (меньшее) основание равно  $3 - 1 = 2$ , верхнее (большее)  $6 - 2 = 4$ , высота  $4 - 1 = 3$ . Итого  $S = 3 \cdot \frac{2+4}{2} = 9$ , **ответ:** 9.

## Тренировочная работа 3А

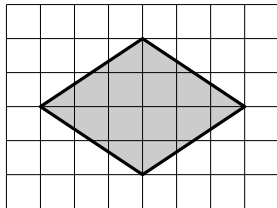
1. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см изображён четырёхугольник. Найдите его площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



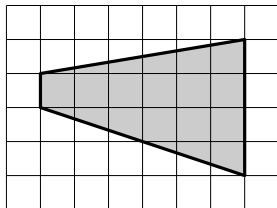
2. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см изображён треугольник. Найдите его площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



3. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см изображён четырёхугольник. Найдите его площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



4. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см изображена трапеция. Найдите её площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



Ответы:

1

--	--	--	--	--	--	--	--

2

--	--	--	--	--	--	--	--

3

--	--	--	--	--	--	--	--

4

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



Ответы:

5

--	--	--	--	--	--	--	--

6

--	--	--	--	--	--	--	--

7

--	--	--	--	--	--	--	--

8

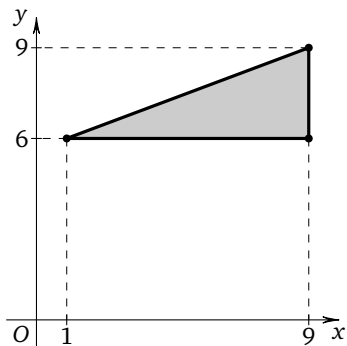
--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

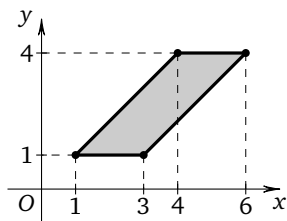
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

# Тренировочная работа 3А

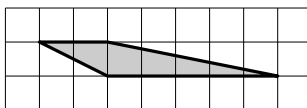
5. На координатной плоскости изображён треугольник. Найдите его площадь.



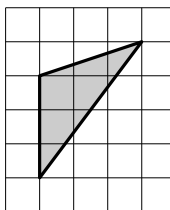
6. На координатной плоскости изображён параллелограмм. Найдите его площадь.



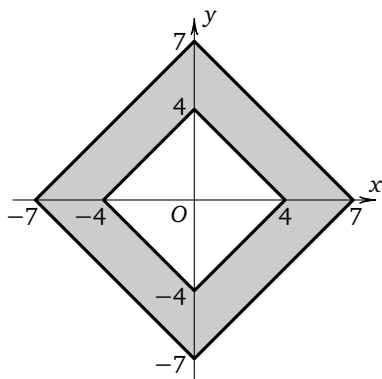
7. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображён четырёхугольник. Найдите его площадь.



8. На клетчатой бумаге со стороной клетки 6 изображён треугольник. Найдите его площадь.



9. Найдите площадь закрашенной фигуры, изображённой на координатной плоскости.



10. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты  $(2; 2)$ ,  $(8; 10)$ ,  $(8; 8)$ .

Ответы:

9

--	--	--	--	--	--	--	--

10

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

1

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

3

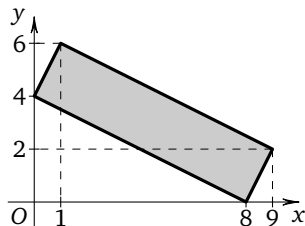
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

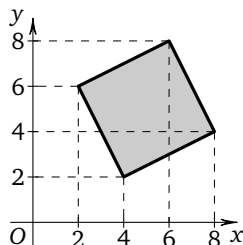
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

## Тренировочная работа 3Б

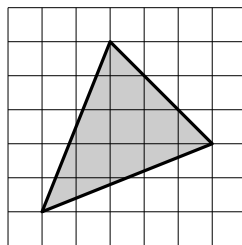
1. На координатной плоскости изображён прямоугольник. Найдите его площадь.



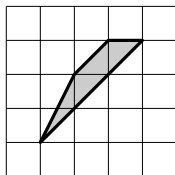
2. На координатной плоскости изображён четырёхугольник. Найдите его площадь.



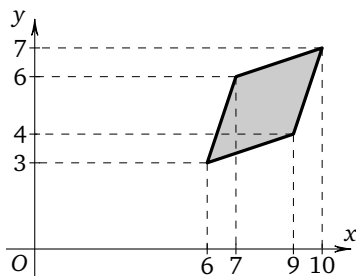
3. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) изображён треугольник. Найдите его площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



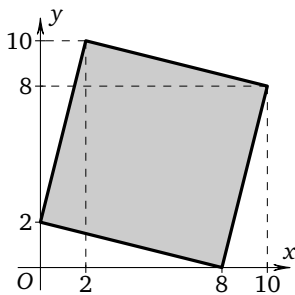
4. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) изображён четырёхугольник. Найдите его площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



5. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты  $(6; 3)$ ,  $(9; 4)$ ,  $(10; 7)$ ,  $(7; 6)$ .



6. На координатной плоскости изображён квадрат. Найдите его площадь.



7. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты  $(0; 0)$ ,  $(-6; 0)$ ,  $(-1; 5)$ ,  $(1; 1)$ .

Ответы:

4

--	--	--	--	--	--	--	--

5

--	--	--	--	--	--	--	--

6

--	--	--	--	--	--	--	--

7

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

8

--	--	--	--	--	--	--	--

9

--	--	--	--	--	--	--	--

10

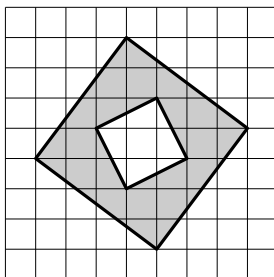
--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

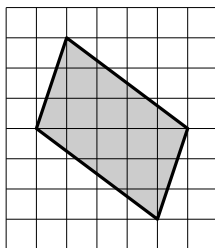
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

# Тренировочная работа 3Б

8. Найдите площадь закрашенной фигуры, изображённой на клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



9. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображён четырёхугольник. Найдите его площадь.

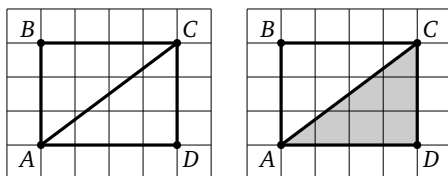


10. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты  $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$ ,  $\left(-\frac{3}{4}; 3\frac{1}{3}\right)$ ,  $\left(2\frac{1}{4}; 4\frac{1}{3}\right)$ ,  $\left(3\frac{1}{4}; 1\frac{1}{3}\right)$ .

## Вычисление площадей перестраиванием. Решения задач 4.1—4.4 диагностической работы 1

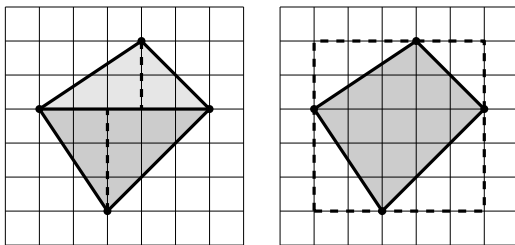
Если фигура, изображённая на клетчатой бумаге, — многоугольник достаточно сложной формы, то для вычисления его площади формулы могут оказаться малополезными. Зато мы можем разделить фигуру линиями на части более простой формы, изменить фигуру, не меняя её площади, но упростив форму, или же дорисовать её до прямоугольника, или какой-то другой фигуры, площадь которой легко вычислить.

«Кирпичиками» при таких манипуляциях часто служат прямоугольные треугольники. Любой (не горизонтальный и не вертикальный) отрезок, соединяющий два узла сетки, можно понимать как диагональ прямоугольника, идущего по линиям сетки: на рисунке отрезок  $AC$  — диагональ прямоугольника  $ABCD$ .



Эта диагональ делит прямоугольник на два равных треугольника, площадь каждого из которых равна половине площади прямоугольника и легко считается. Именно такие треугольники порой будут использоваться при решении задач.

Решим задачу 4.1. Четырёхугольник на картинке не является ни параллелограммом, ни трапецией, и его диагонали не перпендикулярны. Зато горизонтальная диагональ (длины 5) делит его на два треугольника, в каждом из которых нетрудно провести высоту: у верхнего треугольника высота равна 2, у нижнего 3. Итого  $S = \frac{2 \cdot 5}{2} + \frac{3 \cdot 5}{2} = 12,5$ . **Ответ:** 12,5.



Можно решить ту же задачу иначе. Построим четырёхугольник до квадрата (он показан пунктиром). Площадь квадрата 25, при достраивании добавлены четыре прямоугольных треугольника с площадями 3; 3; 2 и 4,5. Итак,

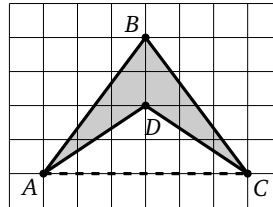
$$S = 25 - 3 - 3 - 2 - 4,5 = 12,5.$$

Решим задачу 4.2. Четырёхугольник на картинке хоть и параллелограмм, но формулу применить трудно. А вот достроить аналогично предыдущему заданию четырьмя треугольниками до прямоугольника  $3 \times 4$  несложно:

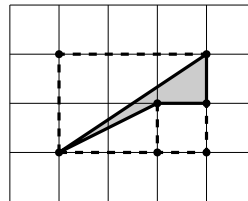
$$S = 12 - 1 - 1 - 1,5 - 1,5 = 7.$$

**Ответ:** 7.

В задаче 4.3 четырёхугольник невыпуклый. Его можно достроить до прямоугольника, а можно представить его площадь в виде разности площадей треугольников  $ABC$  и  $ADC$ :  $S = 12 - 6 = 6$ . Можно и разрезать пополам вертикальной диагональю. **Ответ:** 6.

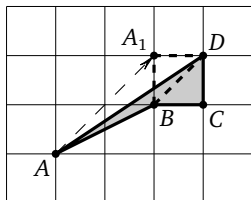


В достраивании невыпуклого четырёхугольника из задачи 4.4 используем прямоугольные треугольники и квадрат:  $S = 6 - 1 - 1 - 3 = 1$ . **Ответ:** 1.



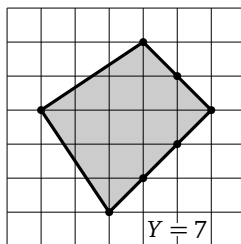
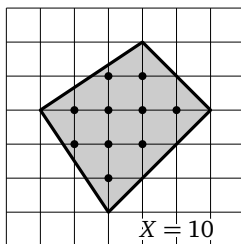
Покажем на примере последней задачи ещё один полезный приём. Из формулы площади треугольника  $S = \frac{1}{2}ah_a$  следует, что если переместить вершину треугольника параллельно основанию (не двигая само основание), то его площадь

не изменится. Поэтому можно переместить вершину  $A$  треугольника  $ABD$  параллельно  $BD$  в точку  $A_1$ . При этом четырёхугольник  $ABCD$  перестроится в квадрат  $A_1BCD$ , площадь которого, очевидно, равна 1.



Конечно, такими способами можно решить и задания предыдущего раздела, не прибегая к формулам.

С другой стороны, любопытно, что существует довольно необычная формула, которая позволяет найти площадь любого многоугольника с вершинами в узлах единичной сетки. Эту формулу вывел австрийский математик Георг Пик, и она носит его имя. Для применения *формулы Пика* нам надо сначала найти два числа:  $X$  — количество узлов сетки, лежащих внутри многоугольника, и  $Y$  — количество узлов сетки на его границе. Тогда  $S = X + \frac{Y}{2} - 1$ . Рассмотрим, например, снова четырёхугольник из задачи 4.1. Внутри него лежит 10 узлов сетки, а на границе 7 узлов.



Формула Пика даёт  $S = 10 + \frac{7}{2} - 1 = 12,5$ . А вот у невыпуклого четырёхугольника из задачи 4.4, как нетрудно видеть,  $X = 0$  и  $Y = 4$ , так что  $S = 0 + \frac{4}{2} - 1 = 1$ .



Ответы:

1

--	--	--	--	--	--	--	--

2

--	--	--	--	--	--	--	--

3

--	--	--	--	--	--	--	--

4

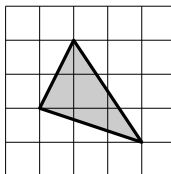
--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

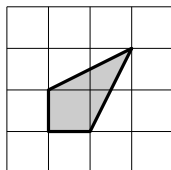
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

## Тренировочная работа 4А

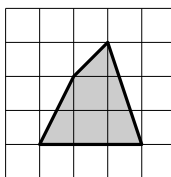
1. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см изображён треугольник. Найдите его площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



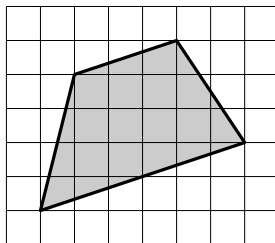
2. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см изображён четырёхугольник. Найдите его площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



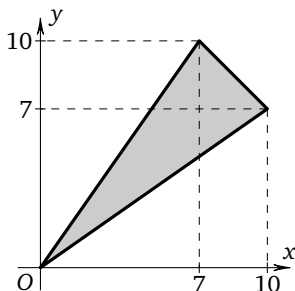
3. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см изображён четырёхугольник. Найдите его площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



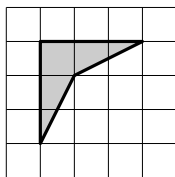
4. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображена трапеция. Найдите её площадь.



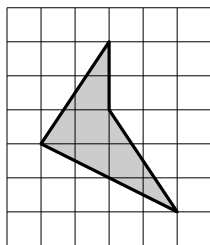
5. На координатной плоскости изображён треугольник. Найдите его площадь.



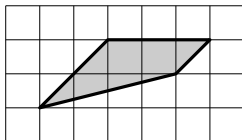
6. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см изображён четырёхугольник. Найдите его площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



7. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображён четырёхугольник. Найдите его площадь.



8. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



Ответы:

5

--	--	--	--	--	--	--	--

6

--	--	--	--	--	--	--	--

7

--	--	--	--	--	--	--	--

8

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

9

--	--	--	--	--	--	--	--

10

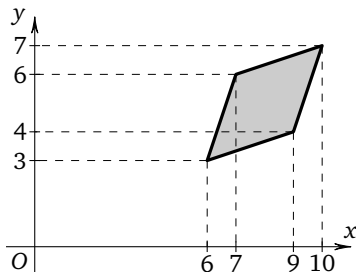
--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

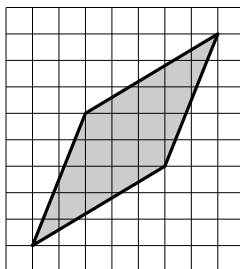
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

# Тренировочная работа 4А

9. Найдите площадь ромба, вершины которого имеют координаты  $(6; 3)$ ,  $(7; 6)$ ,  $(10; 7)$  и  $(9; 4)$ .

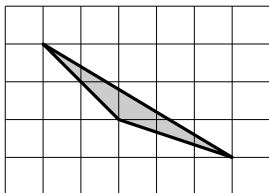


10. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см изображён параллелограмм. Найдите его площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.

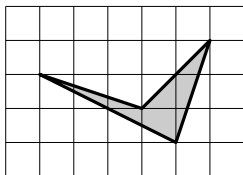


## Тренировочная работа 4Б

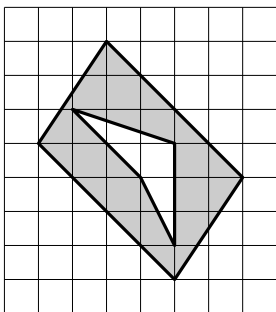
1. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) изображён треугольник. Найдите его площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



2. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображён четырёхугольник. Найдите его площадь.



3. Найдите площадь закрашенной фигуры, изображённой на клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



Ответы:

1

--	--	--	--	--	--	--	--

2

--	--	--	--	--	--	--	--

3

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

4

--	--	--	--	--	--	--	--

5

--	--	--	--	--	--	--	--

6

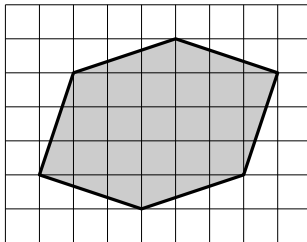
--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

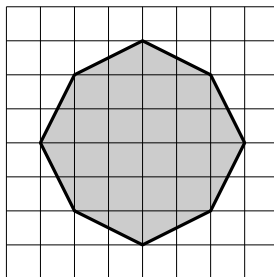
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

# Тренировочная работа 4Б

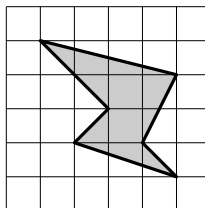
4. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображён шестиугольник. Найдите его площадь.



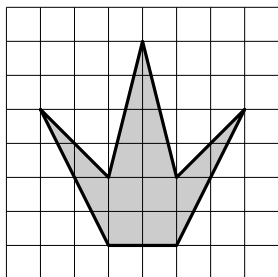
5. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображён восьмиугольник. Найдите его площадь.



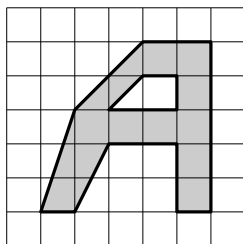
6. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1) изображён шестиугольник. Найдите его площадь.



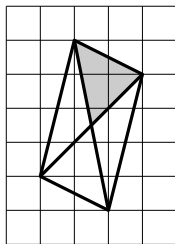
7. Найдите площадь закрашенной фигуры, изображённой на клетчатой бумаге со стороной клетки 3 см. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



8. Найдите площадь закрашенной фигуры, изображённой на клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



9. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображён четырёхугольник. Найдите площадь его закрашенной части.



10. Найдите наибольшую возможную площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты  $(0; 0)$ ,  $(-3; -2)$ ,  $(0; 2)$ ,  $(2; -1)$ .

Ответы:

7

--	--	--	--	--	--	--	--

8

--	--	--	--	--	--	--	--

9

--	--	--	--	--	--	--	--

10

--	--	--	--	--	--	--	--

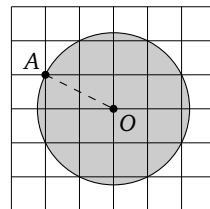
Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

## Площадь круга и его частей. Решения задач 5.1—5.4 диагностической работы 1

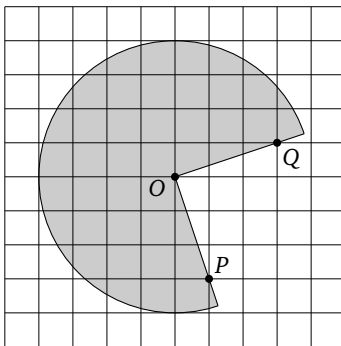
Площадь круга вычисляется по формуле  $S = \pi R^2$ , где  $R$  — его радиус, а  $\pi \approx 3,14\dots$  — коэффициент пропорциональности.

Решим задачу 5.1. На рисунке легко видеть в одном из узлов сетки точку  $O$  — центр круга, а также точку  $A$ , которая лежит на границе круга и тоже является узлом сетки. Теперь находим  $R = OA = \sqrt{5}$ , и тогда  $S = 5\pi$ . **Ответ:**  $5\pi$ .



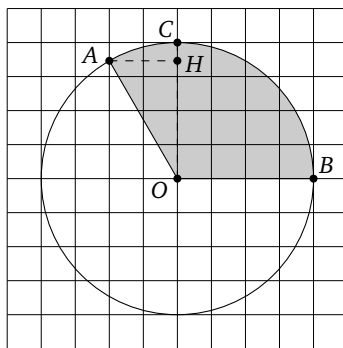
Решим задачу 5.2. Видно, что радиус внутреннего круга равен одной клетке, то есть его площадь равна  $S = \pi x^2$ , где  $x$  — сторона клетки. Отсюда можно было бы найти, что сторона клетки равна  $x = \sqrt{\frac{51}{\pi}}$ , и продолжить решать задачу, но это не лучший путь. Проще, ничего не вычисляя, заметить, что радиус внешнего круга вдвое больше радиуса внутреннего, а тогда его площадь вчетверо больше, то есть равна 204. Площадь закрашенной части равна  $S = 204 - 51 = 153$ . **Ответ:** 153.

Часть круга, заключённая между двумя его радиусами  $OA$  и  $OB$ , называется сектором круга, и её площадь составляет такую же долю от площади круга, какую угол  $AOB$  сектора (этот угол может быть и больше развёрнутого) составляет от полного угла  $360^\circ$ .



Решим задачу 5.3. Для решения задачи надо найти угол закрашенного сектора. Нетрудно найти на радиусах точки  $P$  и  $Q$ , лежащие в узлах сетки. Тогда  $\angle POQ = 90^\circ$ , а угол сектора  $270^\circ$ . Его площадь составит  $\frac{270}{360} = \frac{3}{4}$  площади круга, то есть  $\frac{3}{4} \cdot 16\pi = 12\pi$ . **Ответ:**  $12\pi$ .

Задача 5.4 похожа на предыдущую, но на радиусе  $OA$  нет узлов сетки. Однако сама точка  $A$  лежит на вертикальной линии сетки, и этим можно воспользоваться. Проведём вспомогательный вертикальный радиус  $OC$  и опустим из точки  $A$  на него перпендикуляр  $AH$ . Заметим, что (если сторона клетки равна  $a$ ) радиус окружности равен  $4a$ , а  $AH = 2a$ . Значит,  $\sin \angle COA = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2}$ , то есть  $\angle COA = 30^\circ$ . Тогда  $\angle BOA = 120^\circ$  и если площадь круга равна  $S$ , то  $\frac{32}{S} = \frac{120}{360}$ . Отсюда  $S = 32 \cdot 3 = 96$ . **Ответ:** 96.





Ответы:

1

--	--	--	--	--	--	--	--

2

--	--	--	--	--	--	--	--

3

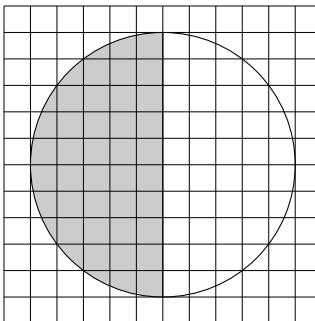
--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

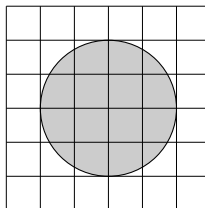
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

## Тренировочная работа 5А

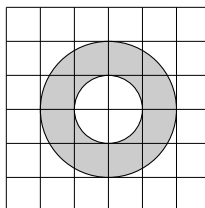
1. На клетчатой бумаге изображён круг площадью 48. Найдите площадь его закрашенной части.



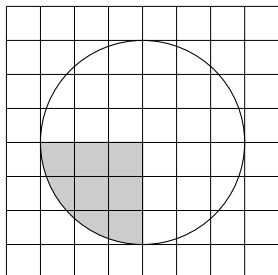
2. Сторона клетки равна 1 см. Найдите площадь  $S$  закрашенной фигуры. Ответ выразите в квадратных сантиметрах. В качестве ответа укажите число  $\frac{S}{\pi}$ .



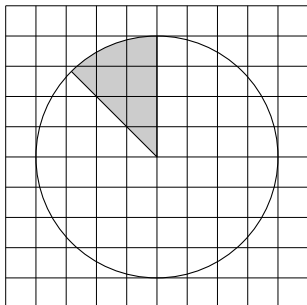
3. Сторона клетки равна 1 см. Найдите площадь  $S$  закрашенной фигуры. Ответ выразите в квадратных сантиметрах. В качестве ответа укажите число  $\frac{S}{\pi}$ .



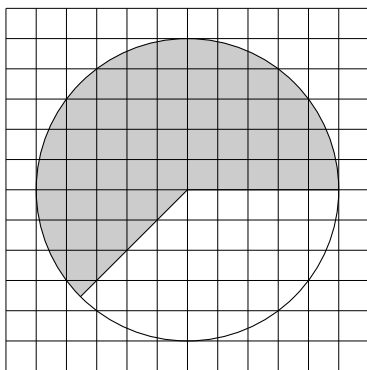
4. На клетчатой бумаге изображён круг. Площадь незакрашенной его части равна 72. Найдите площадь закрашенной части.



5. На клетчатой бумаге изображён круг площади 14. Найдите площадь закрашенной части круга.



6. На клетчатой бумаге изображён круг площади 24. Найдите площадь незакрашенной части круга.



Ответы:

4

--	--	--	--	--	--	--	--

5

--	--	--	--	--	--	--	--

6

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

7

--	--	--	--	--	--	--	--

8

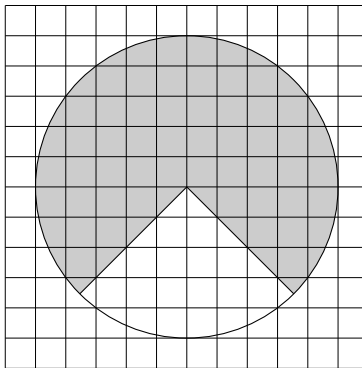
--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

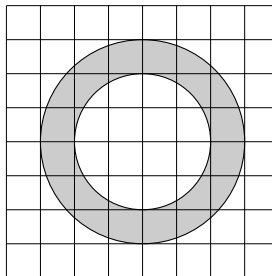
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

# Тренировочная работа 5А

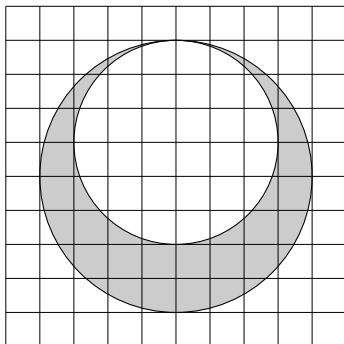
7. На клетчатой бумаге изображён круг площади 68. Найдите площадь закрашенной части круга.



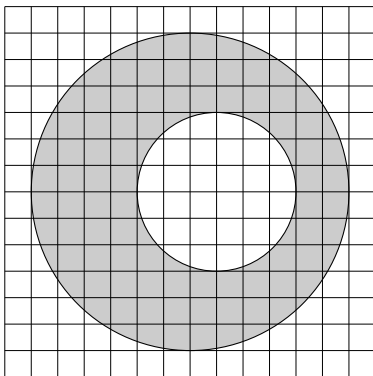
8. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 12. Найдите площадь  $S$  закрашенной фигуры.



9. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 9. Найдите площадь закрашенной фигуры.



10. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь закрашенной фигуры равна 60. Найдите площадь внешнего круга.



Ответы:

9

--	--	--	--	--	--	--	--

10

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

1

--	--	--	--	--	--	--	--

2

--	--	--	--	--	--	--	--

3

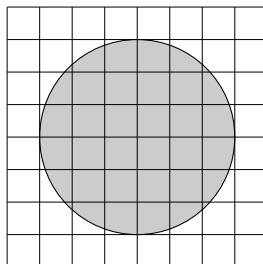
--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

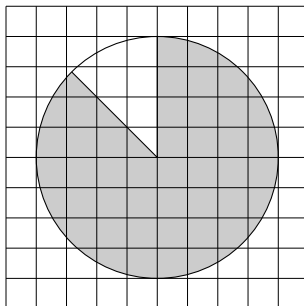
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

## Тренировочная работа 5Б

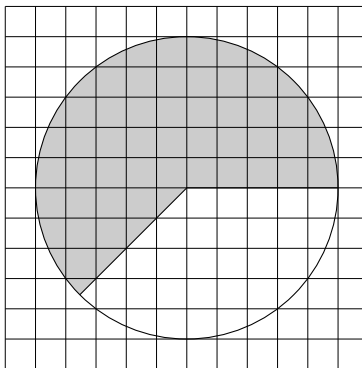
1. На клетчатой бумаге изображён круг площадью  $441\pi$ . Найдите длину стороны клетки.



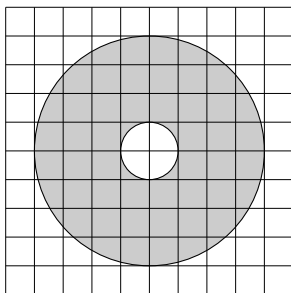
2. На клетчатой бумаге изображён круг. Во сколько раз площадь закрашенной части круга превышает площадь незакрашенной?



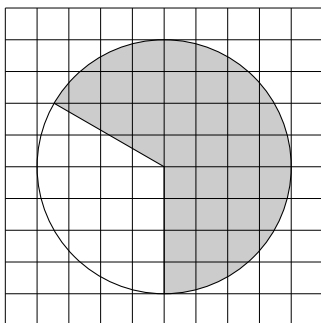
3. На клетчатой бумаге изображён круг площади 24. Какую часть площадь незакрашенной части круга составляет от площади закрашенной?



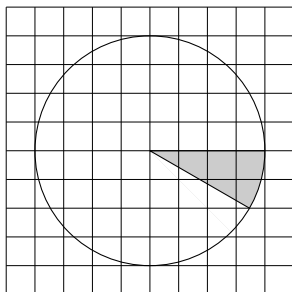
4. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга меньше площади закрашенной фигуры на 70. Найдите площадь внешнего круга.



5. На клетчатой бумаге изображён круг площади 27. Найдите площадь закрашенной части круга.



6. На клетчатой бумаге изображён круг. Площадь закрашенной части круга на 40 меньше площади незакрашенной части. Найдите площадь незакрашенной части.



Ответы:

4

--	--	--	--	--	--	--	--

5

--	--	--	--	--	--	--	--

6

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

7

--	--	--	--	--	--	--	--

8

--	--	--	--	--	--	--	--

9

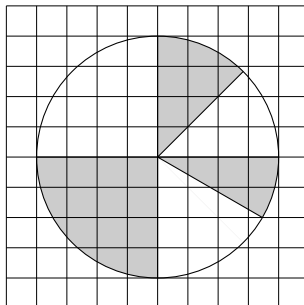
--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

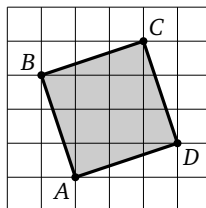
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

# Тренировочная работа 5Б

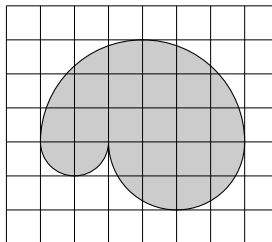
7. Найдите площадь  $S$  закрашенной фигуры, изображённой на клетчатой бумаге со стороной клетки 3 см. Ответ выразите в квадратных сантиметрах. В качестве ответа укажите число  $\frac{S}{\pi}$ .



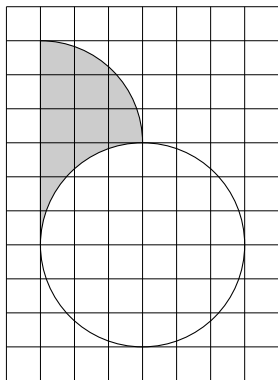
8. На клетчатой бумаге (сторона клетки  $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ ) изображён квадрат. Найдите площадь описанного вокруг него круга.



9. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 изображена фигура. Найдите её площадь  $S$ . В качестве ответа укажите число  $\frac{S}{\pi}$ .



10. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 изображена фигура. Найдите площадь закрашенной её части.



Ответы:

10

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



Ответы:

2.1

--	--	--	--	--	--	--	--

2.2

--	--	--	--	--	--	--	--

2.3

--	--	--	--	--	--	--	--

2.4

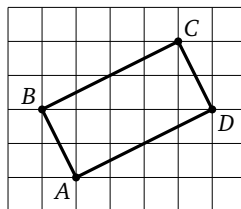
--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

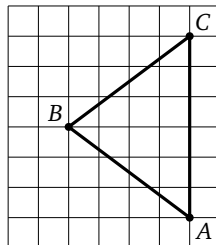
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

## Диагностическая работа 2

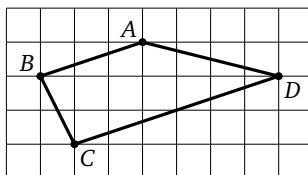
2.1. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) изображён четырёхугольник  $ABCD$ . Найдите радиус описанной вокруг него окружности.



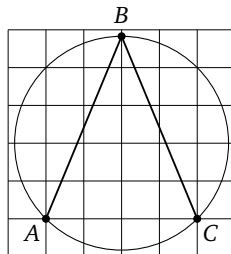
2.2. На клетчатой бумаге изображён треугольник  $ABC$ . Во сколько раз сторона  $AC$  длиннее стороны  $AB$ ?



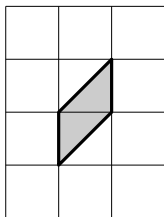
2.3. На клетчатой бумаге изображён четырёхугольник  $ABCD$ . Найдите  $\angle BAD + \angle ADC$ . Ответ выразите в градусах.



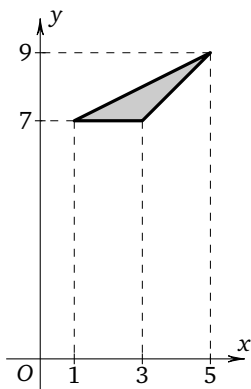
2.4. На клетчатой бумаге изображён угол  $ABC$ . Найдите его величину. Ответ выразите в градусах.



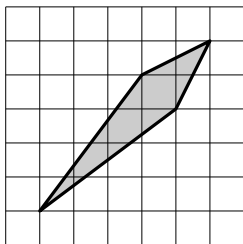
2.5. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) изображён параллелограмм. Найдите его площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



2.6. На координатной плоскости изображён треугольник. Найдите его площадь.



2.7. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) изображён четырёхугольник. Найдите его площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



Ответы:

2.5

--	--	--	--	--	--	--	--

2.6

--	--	--	--	--	--	--	--

2.7

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

2.8

--	--	--	--	--	--	--	--

2.9

--	--	--	--	--	--	--	--

2.10

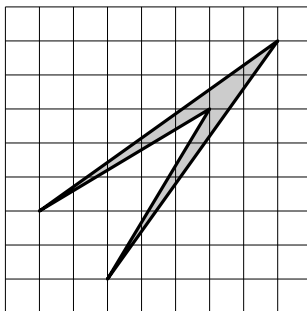
--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

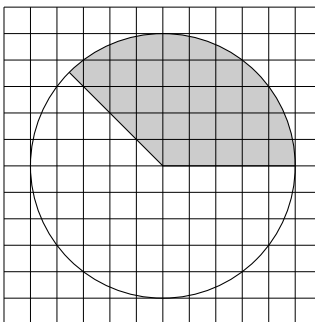
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

## Диагностическая работа 2

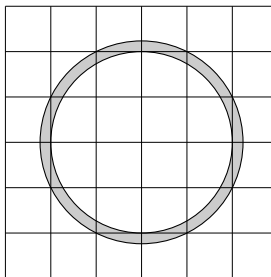
2.8. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ . Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



2.9. На клетчатой бумаге изображён круг. Площадь закрашенного сектора равна 33. Найдите площадь круга.

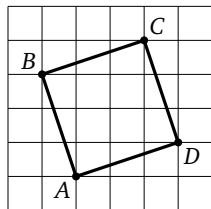


2.10. Найдите площадь  $S$  (в  $\text{см}^2$ ) закрашенного кольца, изображённого на клетчатой бумаге. Сторона клетки равна 1 см. В ответе укажите  $\frac{S}{\pi}$ .

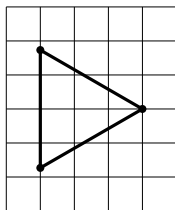


### Диагностическая работа 3

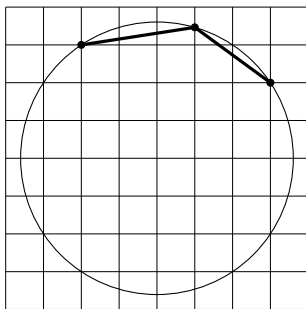
3.1. На клетчатой бумаге с размером клетки  $\sqrt{10} \times \sqrt{10}$  изображён квадрат  $ABCD$ . Найдите его периметр.



3.2. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображён равносторонний треугольник  $ABC$ . Найдите радиус описанной вокруг него окружности.



3.3. На клетчатой бумаге изображён угол, вписанный в окружность. Найдите его величину. Ответ выразите в градусах.



Ответы:

3.1

--	--	--	--	--	--	--	--

3.2

--	--	--	--	--	--	--	--

3.3

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

3.4

--	--	--	--	--	--	--	--

3.5

--	--	--	--	--	--	--	--

3.6

--	--	--	--	--	--	--	--

3.7

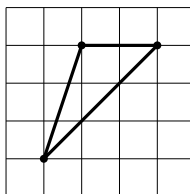
--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

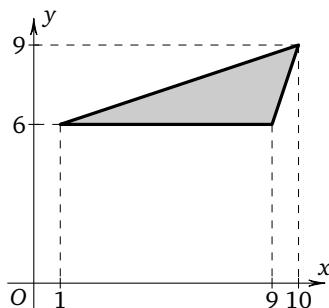
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

### Диагностическая работа 3

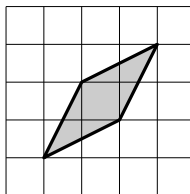
3.4. На клетчатой бумаге изображён треугольник. Найдите тангенс его наименьшего угла.



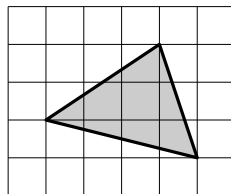
3.5. На координатной плоскости изображён треугольник. Найдите его площадь.



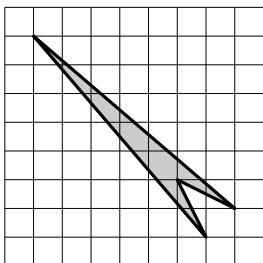
3.6. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) изображён четырёхугольник. Найдите его площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



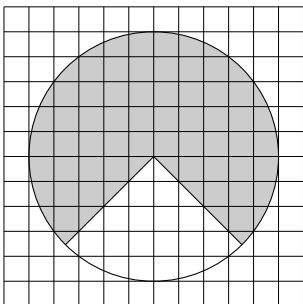
3.7. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1) изображён треугольник. Найдите его площадь.



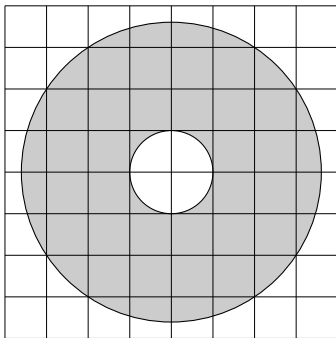
3.8. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ . Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



3.9. На клетчатой бумаге изображён круг. Площадь его закрашенной части равна 39. Найдите площадь круга.



3.10. Найдите площадь  $S$  (в  $\text{см}^2$ ) закрашенного кольца, изображённого на клетчатой бумаге. Сторона клетки равна 1 см. В ответе укажите  $\frac{S}{\pi}$ .



Ответы:

3.8

--	--	--	--	--	--	--	--

3.9

--	--	--	--	--	--	--	--

3.10

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

4.1

--	--	--	--	--	--	--	--

4.2

--	--	--	--	--	--	--	--

4.3

--	--	--	--	--	--	--	--

4.4

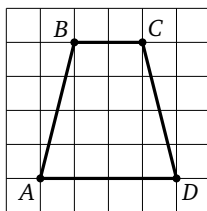
--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

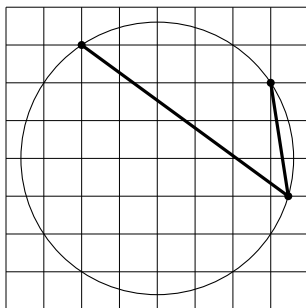
## Диагностическая работа 4

4.1. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображена трапеция  $ABCD$ . Найдите длину её средней линии.

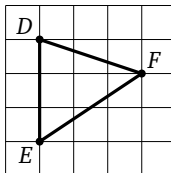


4.2. Центр  $O$  окружности имеет координаты  $O(4; 0)$ . Окружность проходит через точку  $T(1; 4)$ . Найдите диаметр окружности.

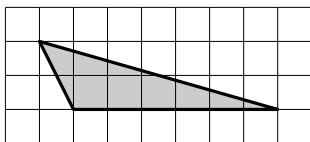
4.3. На клетчатой бумаге изображён угол, вписанный в окружность. Найдите его величину. Ответ выразите в градусах.



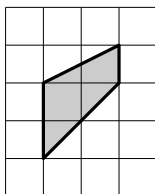
4.4. На клетчатой бумаге изображён треугольник  $DEF$ . Найдите сумму тангенсов углов  $D$  и  $E$  этого треугольника.



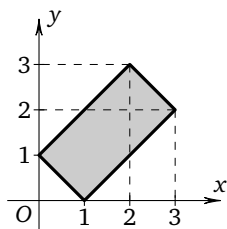
4.5. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) изображён треугольник. Найдите его площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



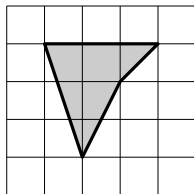
4.6. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) изображена трапеция. Найдите её площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



4.7. На координатной плоскости изображён прямоугольник. Найдите его площадь.



4.8. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) изображён четырёхугольник. Найдите его площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



Ответы:

4.5

--	--	--	--	--	--	--	--

4.6

--	--	--	--	--	--	--	--

4.7

--	--	--	--	--	--	--	--

4.8

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



Ответы:

4.9

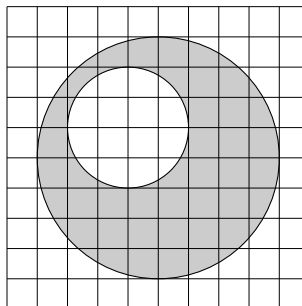
--	--	--	--	--	--	--	--

4.10

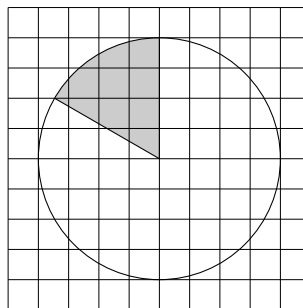
--	--	--	--	--	--	--	--

Диагностическая работа 4

4.9. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 4. Найдите площадь закрашенной фигуры.



4.10. На клетчатой бумаге изображён круг. Площадь закрашенного сектора равна 8. Найдите площадь незакрашенной части круга.

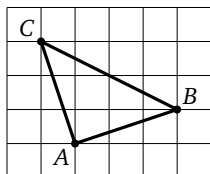


Образец написания:

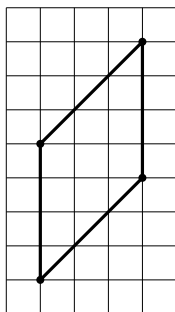
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

## Диагностическая работа 5

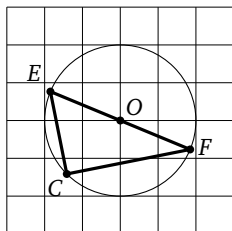
5.1. На клетчатой бумаге (сторона клетки равна  $\sqrt{5}$ ) изображён треугольник  $ABC$ . Найдите длину высоты этого треугольника, выходящей из вершины  $A$ .



5.2. На клетчатой бумаге с размером клетки  $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$  изображён параллелограмм. Найдите длину его короткой высоты.



5.3. На клетчатой бумаге изображён треугольник  $FEC$ , вписанный в окружность. Найдите  $\angle ECF$ . Ответ выразите в градусах.



Ответы:

5.1

--	--	--	--

5.2

--	--	--	--

5.3

--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

5.4

--	--	--	--	--	--	--	--

5.5

--	--	--	--	--	--	--	--

5.6

--	--	--	--	--	--	--	--

5.7

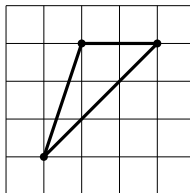
--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

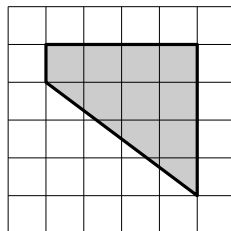
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

# Диагностическая работа 5

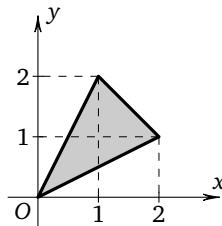
5.4. На клетчатой бумаге изображён треугольник. Найдите тангенс его наибольшего угла.



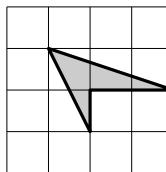
5.5. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) изображена трапеция. Найдите её площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



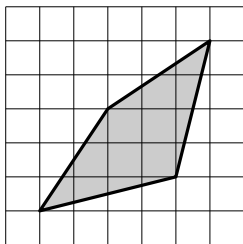
5.6. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке.



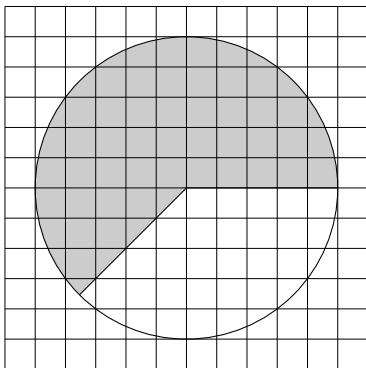
5.7. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) изображён четырёхугольник. Найдите его площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



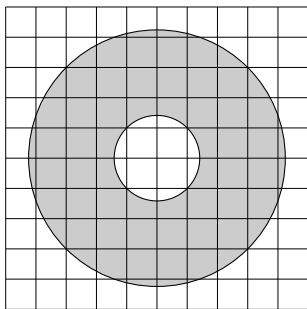
5.8. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) изображён четырёхугольник. Найдите его площадь. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



5.9. На клетчатой бумаге изображён круг площади 40. Найдите площадь закрашенного сектора.



5.10. Найдите площадь  $S$  (в  $\text{см}^2$ ) закрашенного кольца, изображённого на клетчатой бумаге. Сторона клетки равна 1 см. В ответе укажите  $\frac{S}{\pi}$ .



Ответы:

5.8

--	--	--	--	--	--	--	--

5.9

--	--	--	--	--	--	--	--

5.10

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

## Ответы

### Диагностическая работа 1

1.1. 4. 1.2. 17. 1.3. 40. 1.4. 2. 2.1. 135. 2.2. 45. 2.3. 2,5. 2.4. 22,5. 3.1. 6.  
3.2. 12. 3.3. 10. 3.4. 9. 4.1. 12,5. 4.2. 7. 4.3. 6. 4.4. 1. 5.1. 5. 5.2. 153.  
5.3. 12. 5.4. 96.

### Тренировочная работа 1А

1. 4. 2. 3. 3. 5. 4. 2. 5. 12. 6. 5. 7. 10. 8. 4. 9. 3. 10. 34.

### Тренировочная работа 1Б

1. 2,5. 2. 1. 3. 4,5. 4. 7,5. 5. 12,5. 6. 1,5. 7. 3. 8. 0,6. 9. 3,2. 10. 5.

### Тренировочная работа 2А

1. 45. 2. 90. 3. 135. 4. 1,5. 5. 0,4. 6. 180. 7. -4. 8. 90. 9. 135. 10. 0.

### Тренировочная работа 2Б

1. 135. 2. 90. 3. 1,5. 4. -1,5. 5. 45. 6. 30. 7. 67,5. 8. 150. 9. 2. 10. 45.

### Тренировочная работа 3А

1. 28. 2. 6. 3. 12. 4. 15. 5. 12. 6. 6. 7. 3,5. 8. 162. 9. 66. 10. 6.

### Тренировочная работа 3Б

1. 20. 2. 20. 3. 10,5. 4. 2. 5. 8. 6. 68. 7. 18. 8. 20. 9. 15. 10. 10.

### Тренировочная работа 4А

1. 3,5. 2. 2. 3. 5. 4. 16,5. 5. 25,5. 6. 3. 7. 6. 8. 4,5. 9. 8. 10. 19.

### Тренировочная работа 4Б

1. 2. 2. 3. 3. 16,5. 4. 24. 5. 24. 6. 6,5. 7. 108. 8. 13. 9. 2,25. 10. 6,5.

### Тренировочная работа 5А

1. 24. 2. 4. 3. 3. 4. 24. 5. 1,75. 6. 9. 7. 51. 8. 15. 9. 7. 10. 80.

### Тренировочная работа 5Б

1. 7. 2. 7. 3. 0,6. 4. 80. 5. 18. 6. 44. 7. 66. 8. 80. 9. 7. 10. 9.

### Диагностическая работа 2

2.1. 2,5. 2.2. 1,2. 2.3. 180. 2.4. 45. 2.5. 1. 2.6. 2. 2.7. 5. 2.8. 4. 2.9. 88.  
2.10. 1.

## *Ответы*

### **Диагностическая работа 3**

**3.1.** 40.   **3.2.** 2.   **3.3.** 135.   **3.4.** 0,5.   **3.5.** 12.   **3.6.** 3.   **3.7.** 5,5.   **3.8.** 5.   **3.9.** 52.  
**3.10.** 12.

### **Диагностическая работа 4**

**4.1.** 3.   **4.2.** 10.   **4.3.** 45.   **4.4.** 4,5.   **4.5.** 6.   **4.6.** 3.   **4.7.** 4.   **4.8.** 4.   **4.9.** 12.  
**4.10.** 40.

### **Диагностическая работа 5**

**5.1.** 5.   **5.2.** 4.   **5.3.** 90.   **5.4.** −3.   **5.5.** 10.   **5.6.** 1,5.   **5.7.** 1,5.   **5.8.** 10.   **5.9.** 25.  
**5.10.** 16.

## Содержание

|   |    |
|---|----|
| От редактора серии . . . . .  | 3  |
| Введение . . . . .  | 4  |
| Диагностическая работа 1 . . . . .  | 5  |
| Расстояния на плоскости. Решения задач 1.1—1.4 диагностической работы 1 . . .                 | 11 |
| Тренировочная работа 1А . . . . .   | 14 |
| Тренировочная работа 1Б . . . . .   | 17 |
| Измерение углов. Решения задач 2.1—2.4 диагностической работы 1 . . . . .                     | 20 |
| Тренировочная работа 2А . . . . .   | 23 |
| Тренировочная работа 2Б . . . . .   | 26 |
| Вычисление площадей по формулам. Решения задач 3.1—3.4 диагностической работы 1 . . . . .     | 29 |
| Тренировочная работа 3А . . . . .   | 31 |
| Тренировочная работа 3Б . . . . .   | 34 |
| Вычисление площадей перестраиванием. Решения задач 4.1—4.4 диагностической работы 1 . . . . . | 37 |
| Тренировочная работа 4А . . . . .   | 40 |
| Тренировочная работа 4Б . . . . .   | 43 |
| Площадь круга и его частей. Решения задач 5.1—5.4 диагностической работы 1 .                  | 46 |
| Тренировочная работа 5А . . . . .   | 48 |
| Тренировочная работа 5Б . . . . .   | 52 |
| Диагностическая работа 2 . . . . .  | 56 |
| Диагностическая работа 3 . . . . .  | 59 |
| Диагностическая работа 4 . . . . .  | 62 |
| Диагностическая работа 5 . . . . .  | 65 |
| Ответы . . . . .  | 68 |

Учебно-методическое пособие

*Александр Вячеславович Хачатурян*

ЕГЭ 2019. МАТЕМАТИКА. НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

ЗАДАЧА 3 (ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ). ЗАДАЧА 8 (БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ). РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

Под редакцией И. В. Яценко

Подписано в печать 07.08.2018 г. Формат 70 × 90  $\frac{1}{16}$ . Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 4,5. Тираж 3000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра

непрерывного математического образования.

119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–08–04.

**arvato**

BERTELSMANN

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного электронного оригинал-макета в ООО «Ярославский полиграфический комбинат».

150049, Ярославль, ул. Свободы, 97.

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,  
Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (495) 745–80–31. E-mail: [biblio@mccme.ru](mailto:biblio@mccme.ru)

---